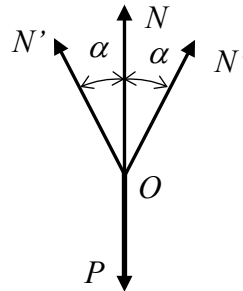


Problème 1

1. Hypothèse : L'angle α peut être considéré comme constant malgré l'action de la force P , ce qui permet d'exprimer l'équilibre du nœud O .
2. Schéma : La symétrie du système donne lieu au diagramme des forces représenté ci-contre.

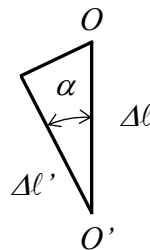


3. L'équilibre horizontal est ainsi satisfait, et l'équilibre vertical implique

$$N + 2N' \cos \alpha - P = 0$$

4. Une deuxième équation, nécessaire pour déterminer N et N' , est fournie par la condition de déformation

$$\Delta \ell' = \Delta \ell \cos \alpha \quad \text{avec} \quad \Delta \ell = \frac{N \ell}{EF} \quad \text{et} \quad \Delta \ell' = \frac{N' \ell'}{E' F'}$$



5. Ces équations donnent alors

$$N = \frac{\lambda}{\lambda + 2 \cos^3 \alpha} P \quad \text{et} \quad N' = \frac{\cos^2 \alpha}{\lambda + 2 \cos^3 \alpha} P$$

6. Remarques :

- Les efforts sont proportionnels à P et indépendants de la longueur des barres.
- Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, alors $N = P$ et $N' = 0$: la barre verticale agit seule.
- Si $\alpha = 0$ et que les trois barres sont identiques ($\lambda = 1$), alors $N = N' = \frac{P}{3}$: les trois barres, parallèles, subissent chacune le même effort.

Problème 2

1. Les contraintes dans le plan ayant pour normale l'axe y valent :

$$\sigma_y = \frac{-P}{F} = -100 \text{ MPa}$$

$$\tau_y = \frac{P}{F} = 100 \text{ MPa}$$

2. Dans le plan dont la normale est l'axe x , on a :

$$\sigma_x = 0 \quad \text{et} \quad \tau_x = -\tau_y = -100 \text{ MPa}$$

3. Les angles de rotation des plans des contraintes principales sont alors :

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} = -2$$

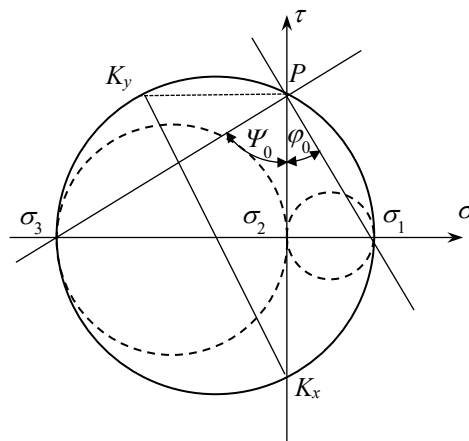
$$\Rightarrow \quad \varphi_0 = -31^\circ 40' \quad \text{et} \quad \psi_0 = -58^\circ 20'$$

4. Les contraintes principales valent :

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_1 = 61,8 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_3 = -162 \text{ MPa}$$

5. Cercle de Mohr de l'état de contrainte :

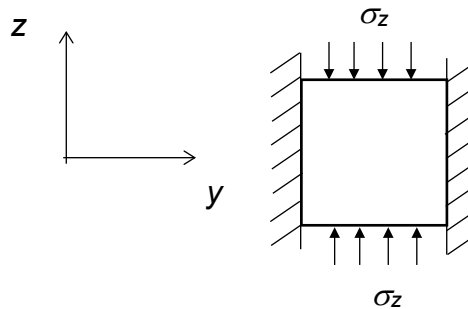


Problème 3

1. Schéma : Comme les parois sont indéformables et comme les faces perpendiculaires à x sont libres on peut dire que

$$\varepsilon_y = 0$$

$$\sigma_x = 0$$



2. L'application de la loi de Hooke permet d'exprimer les déformations relatives comme étant

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu \sigma_z] = 0$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu \sigma_y] = \frac{1 - \mu^2}{E} \sigma_z$$

3. Le module apparent vaut donc (Acier 37 : $E = 210 \text{ GPa}$ et $\mu = 0.27$)

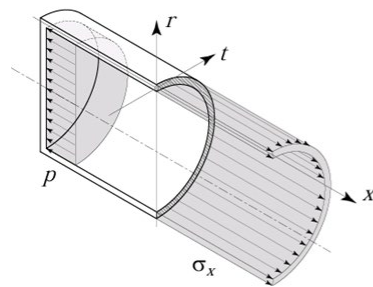
$$E_a = \frac{\sigma_z}{\varepsilon_z} = \frac{E}{1 - \mu^2} = 226.5 \text{ GPa}$$

4. Commentaires :

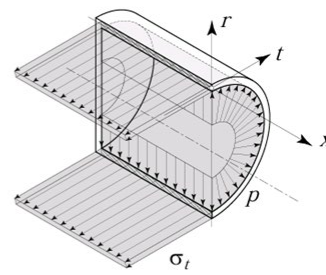
Le blocage latéral augmente la rigidité du système. Le module apparent E_a est de 8% supérieur au module E . Il serait même de 25% supérieur si le parallélépipède était aussi bloqué selon l'axe x .

Problème 4

1. Schéma explicatif



Contraintes axiales



Contraintes circonferentielles

2. Equilibre des forces dans les directions x et t

$$\Sigma F_x = \pi R^2 p - 2\pi R e \sigma_x = 0 \quad \text{d'où} \quad \sigma_x = \frac{pR}{2e}$$

$$\Sigma F_t = 2R \ell p - 2\ell e \sigma_t = 0 \quad \text{d'où} \quad \sigma_t = \frac{pR}{e}$$

3. Allongement relatif et loi d'élasticité : La contrainte selon la troisième direction étant négligée, on traitera le problème comme un état de contrainte bidimensionnel.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu \sigma_t) = \frac{\sigma_x}{E}(1 - 2\mu) = \frac{pR}{2eE}(1 - 2\mu)$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu \sigma_x) = \frac{\sigma_t}{E}(2 - \mu) = \frac{pR}{2eE}(2 - \mu)$$

4. Variation relative de volume : expression des grandeurs géométriques en fonction des déformations élastiques imposées

$$R' = R(1 + \varepsilon_t)$$

$$\ell' = \ell(1 + \varepsilon_x)$$

Le volume devient ainsi

$$V' = \pi R'^2 \ell' = \pi R^2 (1 + \varepsilon_t)^2 \ell (1 + \varepsilon_x) = V(1 + 2\varepsilon_t + \varepsilon_x + \dots)$$

D'où la variation relative de volume du cylindre :

$$v_c = \frac{V' - V}{V} = 2\varepsilon_t + \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}(5 - 4\mu) = \frac{pR}{2eE}(5 - 4\mu)$$

5. Application numérique

$$\sigma_x = 125 \text{ MPa}$$

$$\sigma_t = 2\sigma_x = 250 \text{ MPa}$$

$$v_c = 2,26 \text{ ‰}$$

6. Cercle de Mohr : Le point de l'état de contrainte K_φ se trouve sur le cercle de Mohr Γ_{12} (correspondant à la rotation autour de l'axe $M_0 z$ d'un élément de surface de normale $M_0 x$ vers la direction $M_0 t$). L'angle repérant ce point par rapport à l'origine $\sigma_2 = \sigma_x$ vaut $2\varphi = 120^\circ$.

Algébriquement, on trouve les contraintes suivantes :

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_x + \sigma_t}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_t}{2} \cos 2\varphi = 219 \text{ MPa}$$

$$\tau_\varphi = -\frac{\sigma_x - \sigma_t}{2} \sin 2\varphi = 54,1 \text{ MPa}$$

On peut alors dessiner le cercle de Mohr et représenté l'état de contrainte au point M_0

